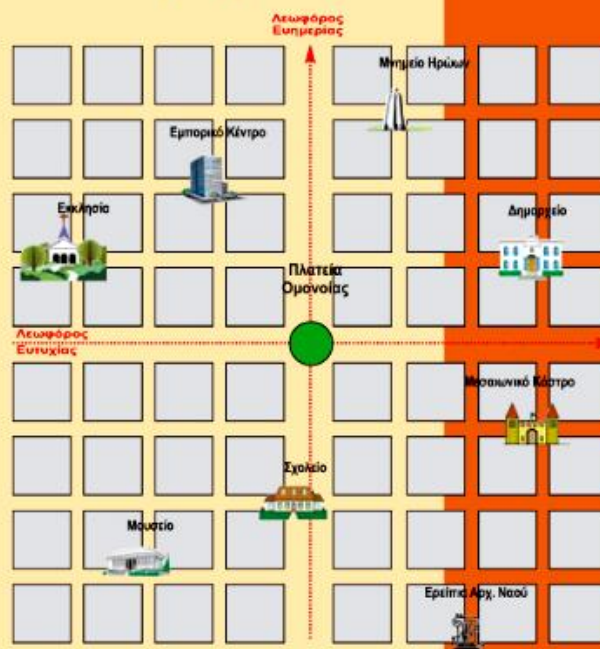


ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο

## Συναρτήσεις



Ερωτήσεις , απαντήσεις & παραδείγματα

### Ερώτηση 1

Τι ονομάζουμε σύνολο ;

Σύνολο ονομάζουμε μια ομάδα από όμοια αντικείμενα.

Σύνολο ονομάζουμε κάθε συλλογή αντικειμένων που προέρχονται απ' την εμπειρία μας ή την διανοήσή μας, είναι καλά ορισμένα και διακρίνονται το ένα από το άλλο.

(George Cantor)

### Ερώτηση 2

Τι ονομάζουμε συνάρτηση ;

Έστω A ένα σύνολο (το σύνολο των x) , B ένα σύνολο ( το σύνολο των y ).

Ονομάζουμε συνάρτηση τη διαδικασία με την οποία κάθε στοιχείο x του συνόλου A αντιστοιχίζεται σε ένα στοιχείο y του συνόλου B.

### Ερώτηση 3

Πώς ορίζεται πλήρως μία συνάρτηση ;

Για να οριστεί πλήρως μία συνάρτηση χρειαζόμαστε:

- i. A το σύνολο των x (πεδίο ορισμού)
- ii. B το σύνολο των y (πεδίο τιμών)
- iii. Έναν τύπο π.χ.  $y=2x$

### Ερώτηση 4

Τι είναι ο πίνακας τιμών μιας συνάρτησης ;

Π.χ.  $y=2x$

x	-1	0	1	2	3
y	-2	0	2	4	6

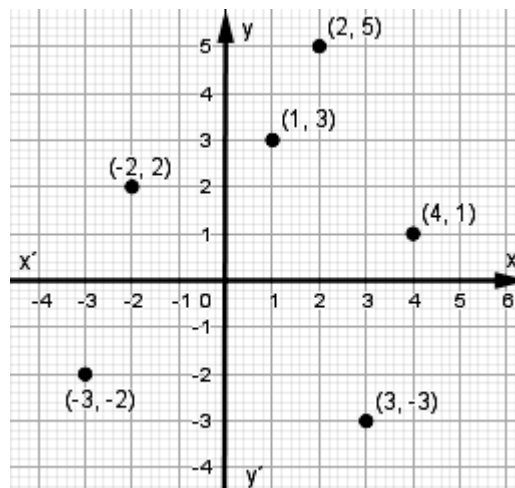
Ένας πίνακας τιμών είναι πίνακας με διατεταγμένα ζεύγη (x,y) που «επαληθεύουν» τον τύπο της συνάρτησης. Ένα διατεταγμένο ζεύγος (x,y) του πάνω πίνακα είναι το  $(x,y) =(3,6)$  γιατί για  $x=3$  ισχύει  $y=2 \cdot 3=6$ .

### Ερώτηση 5

Τι ονομάζουμε συντεταγμένες ενός σημείου M(x,y);

Οι συντεταγμένες ενός σημείου M είναι ένα ζεύγος διατεταγμένων αριθμών που προσδιορίζουν τη θέση του σημείου στο καρτεσιανό επίπεδο . Συγκεκριμένα , το x ονομάζεται τετμημένη του σημείου M και δείχνει πόσο δεξιά ή, αριστερά κινούμαστε από το σημείο O (0,0) και το y ονομάζεται τεταγμένη του σημείου M και δείχνει πόσο πάνω ή κάτω κινούμαστε από το O (0,0).

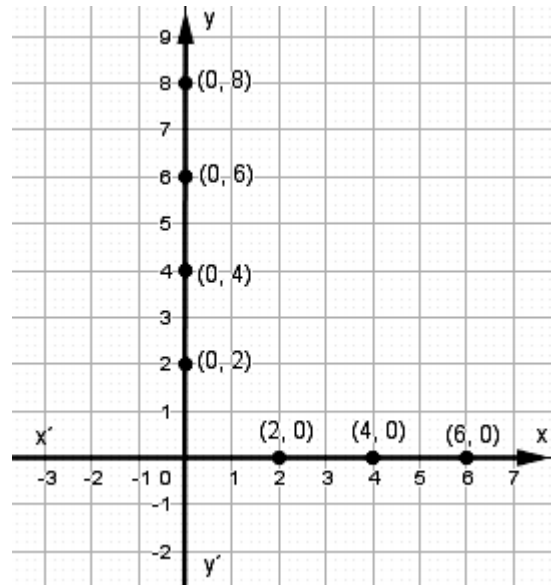
Π.χ.



### Ερώτηση 6

Τι τετμημένη έχουν όλα τα σημεία του άξονα  $y'y'$  και τι τεταγμένη έχουν όλα τα σημεία στον άξονα  $x'x$  ;

Όλα τα σημεία στον  $y'y'$  έχουν  $x=0$ , πχ το σημείο  $(0,2)$  και όλα τα σημεία στον  $x'x$  έχουν  $y=0$ , πχ το σημείο  $(3,0)$

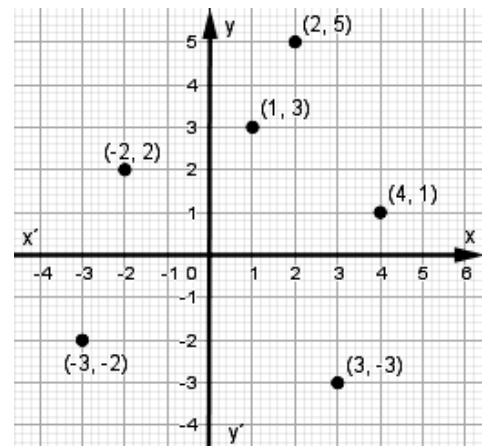


### Ερώτηση 7

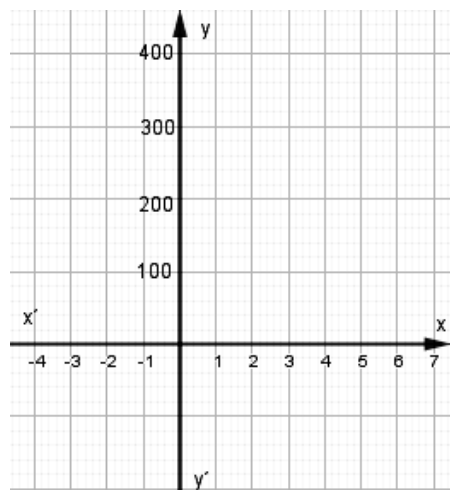
Σε τι διαφέρει το ορθογώνιο από το ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων ;

Πρόκειται για συστήματα συντεταγμένων με κάθετους άξονες αλλά

στο ορθοκανονικό σύστημα έχουμε ίδια διαμέριση στους άξονες (ίδιο μήκος χωρίσματος),



ενώ στο ορθογώνιο έχουμε διαφορετική διαμέριση στους άξονες.

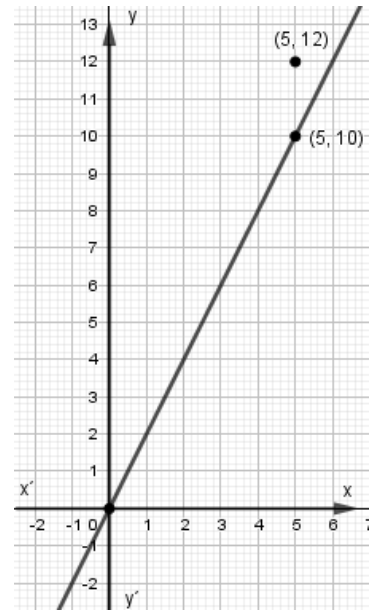


### Ερώτηση 8

Τι ονομάζουμε γραφική παράσταση μιας συνάρτησης;

Γραφική παράσταση μιας συνάρτησης είναι το σύνολο όλων σημείων  $M(x,y)$  που οι συντεταγμένες τους επαληθεύουν τον τύπο της συνάρτησης ( δηλαδή ανήκουν στον πίνακα τιμών).

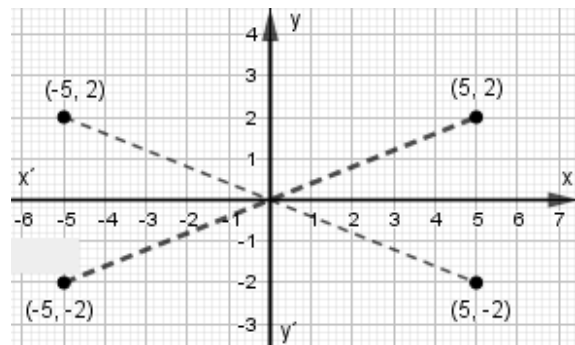
Π.χ. το σημείο  $M(5,10)$  ανήκει στη γραφική παράσταση της  $y=2 \cdot x$  γιατί  $10=2 \cdot 5$  ενώ  $N(5,12)$  δεν ανήκει γιατί  $12 \neq 2 \cdot 5$ .



### Ερώτηση 9 ( εκτός εξεταστέας ύλης!)

Μπορείτε να βρείτε το συμμετρικό ενός σημείου  $M(x,y)$  :

- i. Ως προς τον  $x'$
- ii. Ως προς τον  $y'$
- iii. Ως το  $O(0,0)$



- i.  $M'(x,-y)$
- ii.  $M''(-x,y)$
- iii.  $M'''(-x,-y)$

### Ερώτηση 10

Τι είναι τεταρτημόρια; Ποια τα πρόσημα των συντεταγμένων των σημείων σε κάθε ένα από αυτά αντίστοιχα ;

Τεταρτημόρια ονομάζονται τα 4 μέρη που χωρίζεται το επίπεδο από τους κάθετους άξονες  $x'$  ,  $y'$  .Η ονομασία τους και τα πρόσημα των συντεταγμένων των σημείων τους φαίνεται στο σχήμα .



**Ερώτηση 11 ( εκτός εξεταστέας ύλης!)**

Πως υπολογίζουμε την απόσταση AB δύο σημείων A και B στο επίπεδο;

(Εφαρμογή 3 σελίδα 63 σχολικού βιβλίου)

**ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3**

Δίνονται τα σημεία A(2, 3) και B(10, 9). Να υπολογίσετε την απόστασή τους AB. Τι συμπεραίνετε;

**Λύση:** Σχηματίζουμε το ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ του διπλανού σχήματος. Τότε το σημείο Γ έχει συντεταγμένες (10, 3), οπότε  $ΑΓ = 10 - 2 = 8$  και  $ΒΓ = 9 - 3 = 6$ .

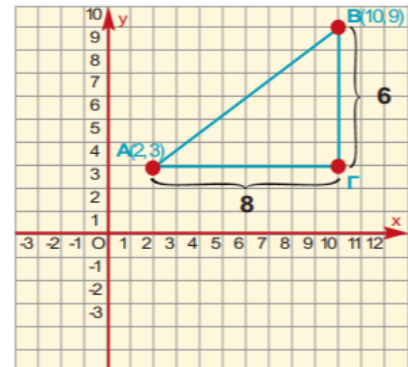
Από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε ότι:

$$AB^2 = AG^2 + BG^2 \quad \text{ή}$$

$$AB^2 = 8^2 + 6^2 \quad \text{ή}$$

$$AB^2 = 100 \quad \text{ή}$$

$$AB = 10$$



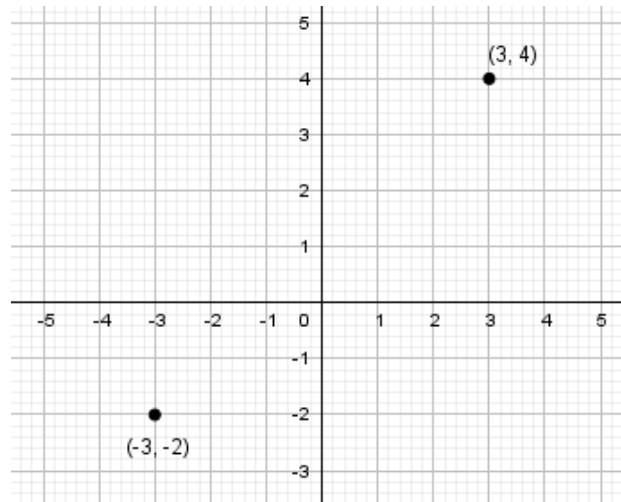
Γενικότερα:

Αν δίνονται δύο σημεία A(x<sub>1</sub>, y<sub>1</sub>) και B(x<sub>2</sub>, y<sub>2</sub>), η απόστασή τους υπολογίζεται από τον τύπο:  $AB = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ .

**Ερώτηση 12**

Πόσο απέχει ένα σημείο A (x,y) από τον άξονα x'x και πόσο απέχει από τον άξονα y'y ;

Το σημείο A απέχει από τον άξονα x'x απόσταση |y| και από τον άξονα y'y απόσταση |x|.



**Ερώτηση 13**

Ποια ποσά (x,y) λέγονται ανάλογα ;

Δύο ποσά (x,y) λέγονται ανάλογα όταν πολλαπλασιάζοντας τις τιμές του ενός ποσού x με έναν αριθμό , τότε και οι αντίστοιχες τιμές του άλλου ποσού (y) πολλαπλασιάζονται με τον ίδιο αριθμό .

<b>x</b>	0	1	2	3	4	5
<b>y</b>	0	2	4	6	8	10

**Ερώτηση 14**

Ποια η βασική ιδιότητα των ανάλογων ποσών ;

Αν δύο ποσά (x,y) είναι ανάλογα , τότε ο λόγος τους  $\frac{y}{x}$  είναι σταθερός. Δηλαδή :

$$\frac{y}{x} = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{6}{3} = \frac{8}{4} = \frac{10}{5} = 2 = \alpha$$

Άρα  $\frac{y}{x} = \alpha$  και  $y = \alpha x$

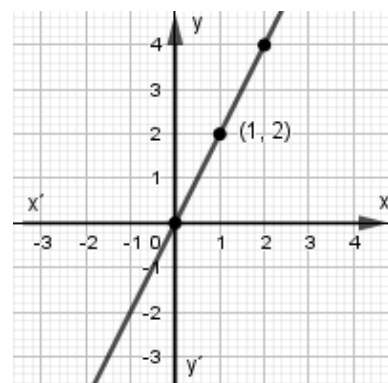
**Ερώτηση 15**

Τι γνωρίζετε για την γραφική παράσταση της  $y = \alpha x$  ;

Η γραφική παράσταση της  $y = \alpha x$  είναι μια ευθεία που διέρχεται από το  $O(0,0)$ , γιατί για  $x=0$  το  $y = \alpha \cdot 0 = 0$

Π.χ.  $y = 2x$

<b>x</b>	0	1	2	3
<b>y</b>	0	2	4	6



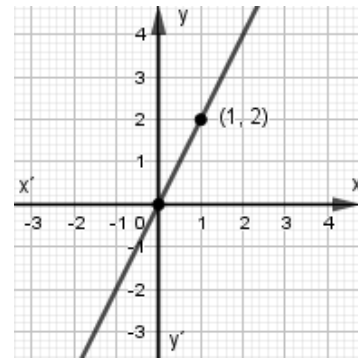
**Ερώτηση 16**

Τι γνωρίζετε για την κλίση  $\alpha$  της ευθείας  $y=ax$ ;

Η κλίση  $\alpha$  της  $y=ax$  καθορίζει τη μορφή της ευθείας (η κλίση  $\alpha$  ονομάζεται και συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας).

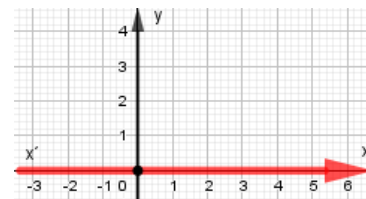
$\alpha > 0$   $y=2x$

<b>x</b>	0	1
<b>y</b>	0	2



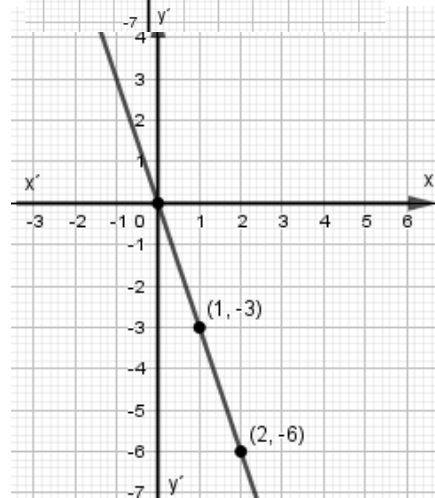
$\alpha = 0$   $y=0x$

<b>x</b>	0	1	2
<b>y</b>	0	0	0



$\alpha < 0$   $y=-3x$

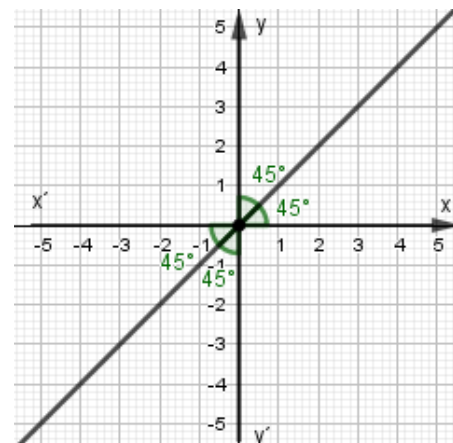
<b>x</b>	0	1	2
<b>y</b>	0	-3	-6



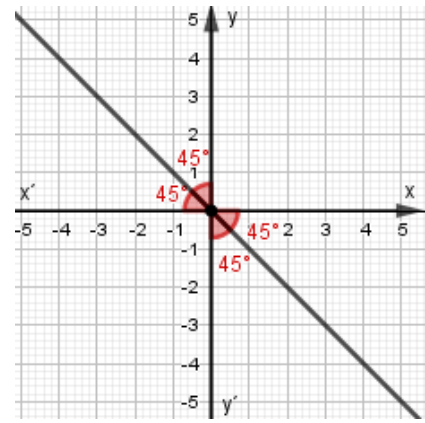
**Ερώτηση 17**

α) Τι εξίσωση έχει η διχοτόμος της πρώτης και της τρίτης γωνίας των αξόνων ;

Η διχοτόμος της 1ης και της 3ης γωνίας των αξόνων είναι η ευθεία  $y=x$ .



β) Τι εξίσωση έχει η διχοτόμος της 2<sup>ης</sup> και της 4<sup>ης</sup> γωνίας των αξόνων έχει η εξίσωση  $y=-1x$  (εφαρμογή 2 σελ 69)



### Ερώτηση 18

Πώς βρίσκουμε την κλίση  $a$  της  $y=ax$ ; (Βασικές περιπτώσεις)

1) Από γνωστό σημείο

Π.χ. Να βρεθεί η ευθεία  $y=ax$  που διέρχεται από το σημείο  $A(-4,8)$ .

Λύση

$$y=ax$$

$$8=-4a$$

$$a=-2$$

Άρα η εξίσωση της ζητούμενης ευθείας είναι:  $y=-2x$

2) Να βρεθεί η ευθεία η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων και έχει κλίση  $-5$ .

Αφού η ευθεία διέρχεται από την αρχή των αξόνων, τότε είναι της μορφής  $y=ax$ .

Επειδή έχει κλίση  $-5$  ισχύει  $a=-5$  οπότε ευθεία είναι η:  $y=-5x$ .

3) Να βρεθεί η ευθεία  $y=ax$  που σχηματίζει γωνία  $\omega=60^\circ$  με τον άξονα  $x'$ .

(Δίνεται ότι  $\text{εφ}60^\circ=\sqrt{3}$ )

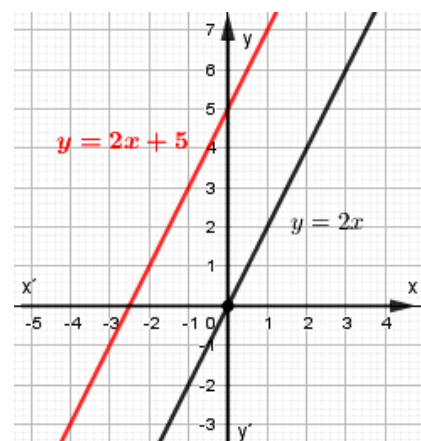
Ισχύει  $a=\text{εφ}60^\circ$  επομένως ευθεία έχει εξίσωση  $y = \sqrt{3}x$

### Ερώτηση 19

Τι γνωρίζετε για τη γραφική παράσταση της  $y=ax+\beta$ ;

Η  $y=ax+\beta$  είναι μία ευθεία παράλληλη στην ευθεία  $y=ax$ .

Π.χ. Η  $y=2x+5$  είναι παράλληλη στην ευθεία  $y=2x$





### Ερώτηση 20

Δώστε την ερμηνεία των  $\alpha$  και  $\beta$  συντελεστών στον τύπο  $y=\alpha x+\beta$ .

Το  $\alpha$  (που είναι ο συντελεστής του  $x$ ) εκφράζει την κλίση της ευθείας ( Ερώτηση 16 ).  
Ο συντελεστής  $\beta$  είναι η τεταγμένη του σημείου που η ευθεία τέμνει τον άξονα  $y'y$ .

Π.χ.

$$y=2x+8 \quad (\alpha=2 \quad \beta=8)$$

<b>x</b>	0	1
<b>y</b>	8	10

### Ερώτηση 21

Πώς βρίσκω τα σημεία τομής της  $y=\alpha x+\beta$  με τους άξονες  $x'x$  και  $y'y$ ;

Π.χ.

Βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας  $y=2x+8$  με τους άξονες  $x'x$  και  $y'y$ .

Για  $x=0$  το  $y=2 \cdot 0+8 = 8$

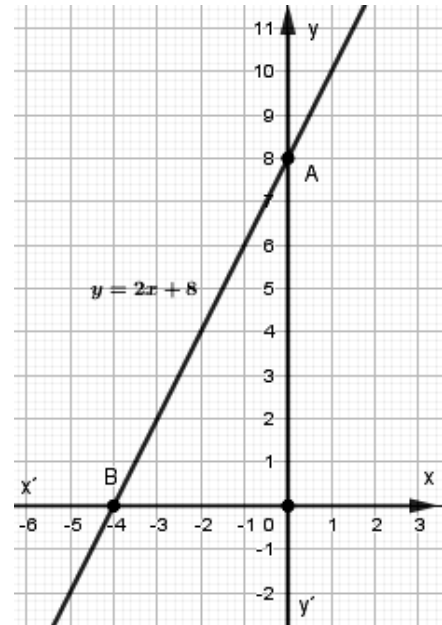
Άρα τέμνει τον άξονα  $y'y$  στο σημείο  $A(0,8)$  και

για  $y=0$  το  $0=2x+8$

$$-2x=8$$

$$x=-4$$

Άρα τέμνει τον άξονα  $x'x$  στο σημείο  $B(-4,0)$



**Ερώτηση 22**

Ποια είναι η μορφή της  $y=ax+\beta$  ανάλογα με τις τιμές που παίρνουν τα  $a$  και τα  $\beta$ ;

$y=ax+\beta$

$\alpha > 0$

i)  $\beta > 0$   
 $y=2x+8$

<b>x</b>	0	1
<b>y</b>	8	10

ii)  $\beta = 0$

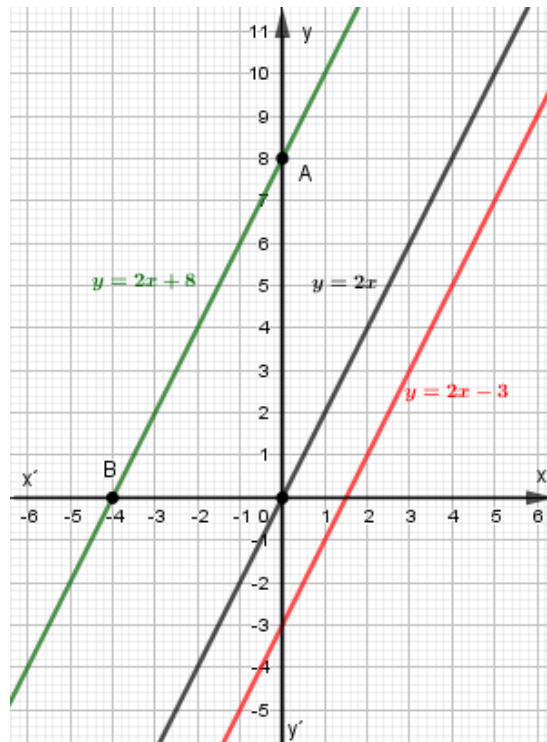
$y=2x$

<b>x</b>	0	1
<b>y</b>	0	2

iii)  $\beta < 0$

$y=2x-3$

<b>x</b>	0	1
<b>y</b>	-3	-1



$\alpha = 0$

i)  $\beta > 0$   
 $y=0x+3$

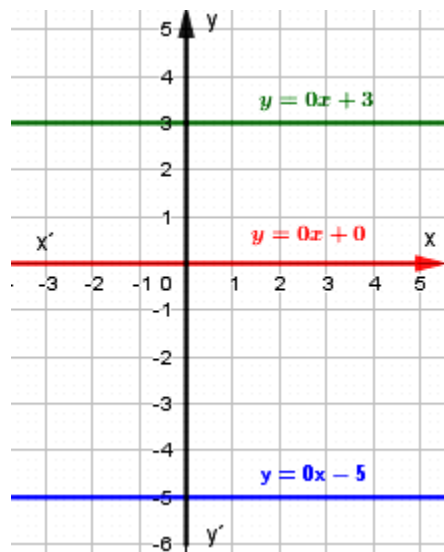
<b>x</b>	0	1
<b>y</b>	3	3

ii)  $\beta = 0$   
 $y=0x+0$

<b>x</b>	0	1
<b>y</b>	0	0

iii)  $\beta < 0$   
 $y=0x-5$

<b>x</b>	0	1
<b>y</b>	-5	-5



$\alpha < 0$

i)  $\beta > 0$   
 $y = -3x + 5$

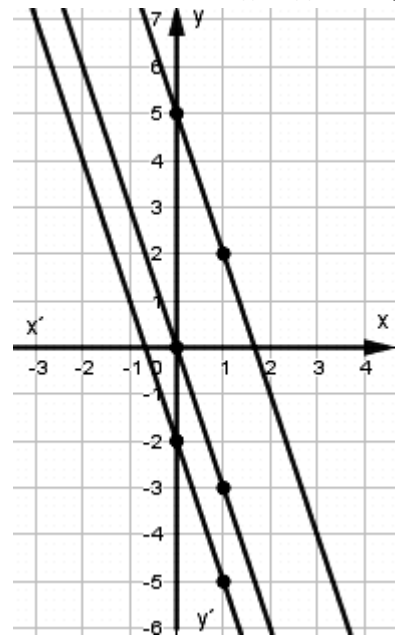
<b>x</b>	0	1
<b>y</b>	5	2

ii)  $\beta = 0$   
 $y = -3x$

<b>x</b>	0	1
<b>y</b>	0	-3

iii)  $\beta < 0$   
 $y = -3x - 2$

<b>x</b>	0	1
<b>y</b>	-2	-5



### Ερώτηση 23

Πόσοι οι τρόποι εύρεσης της ευθείας  $y = ax + \beta$ ; (Βασικές περιπτώσεις)

i) Να βρεθεί η ευθεία  $y = ax + \beta$  η οποία έχει κλίση 5 και διέρχεται από το σημείο  $K(4, 17)$

$\alpha = 5$  άρα  $y = 5x + \beta$   
Επιπλέον για  $x = 4$  ισχύει  $y = 17$  οπότε:  
 $17 = 5 \cdot 4 + \beta$   
 $-\beta = 20 - 17$   
 $\beta = -3$   
Επομένως η ζητούμενη εξίσωση της ευθείας είναι:  $y = 5x - 3$

ii) Να βρεθεί η ευθεία  $y = ax + \beta$  η οποία είναι παράλληλη στην  $y = 5x$  και διέρχεται από το σημείο  $K(4, 17)$

$\alpha = 5$  άρα  $y = 5x + \beta$   
Επιπλέον για  $x = 4$  ισχύει  $y = 17$  οπότε:  
 $17 = 5 \cdot 4 + \beta$   
 $-\beta = 20 - 17$   
 $\beta = -3$   
Επομένως η ζητούμενη εξίσωση της ευθείας είναι:  $y = 5x - 3$

iii) Να βρεθεί η ευθεία που σχηματίζει η γωνία  $\omega = 60^\circ$  με τον άξονα  $x'x$  ( $\epsilon\phi 60^\circ = \sqrt{3}$ ) και διέρχεται από το  $K(0, 10)$

Ισχύει  $\alpha = \epsilon\phi\omega = \sqrt{3}$ , άρα  $y = \sqrt{3}x + \beta$   
Επιπλέον για  $x = 0$  ισχύει  $y = 10$  οπότε:  
 $10 = \sqrt{3} \cdot 0 + \beta$   
 $10 = \beta$   
Επομένως η ζητούμενη εξίσωση της ευθείας είναι:  $y = \sqrt{3}x + 10$

iv) Να βρεθεί η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία  $K(0, 4)$   $A(1, 12)$   
Ισχύει πως για  $x = 0$  ισχύει  $y = 4$  οπότε:

$$4 = \alpha \cdot 0 + \beta \Rightarrow \beta = 4$$

Επιπλέον για  $x=1$  ισχύει  $y=12$  οπότε:

$$y = \alpha x + 4$$

$$12 = \alpha \cdot 1 + 4$$

$$\alpha = 8$$

Επομένως η ζητούμενη εξίσωση της ευθείας είναι :  $y = 8x + 4$

### Ερώτηση 24

Πώς βρίσκω το σημείο τομής δύο ευθειών;

Π.χ.

$$(\epsilon_1): y = 1x$$

$$(\epsilon_2): y = 0,5x + 10$$

Το σημείο τομής T θα έχει τα ίδια x και y και για τις δύο ευθείες .

Άρα εξισώνω τα y και λύνω μία εξίσωση μόνο με x.

$$(\epsilon_1): y = 1x$$

$$(\epsilon_2): y = 0,5x + 10$$

$$\text{Οπότε: } 1x = 0,5x + 10$$

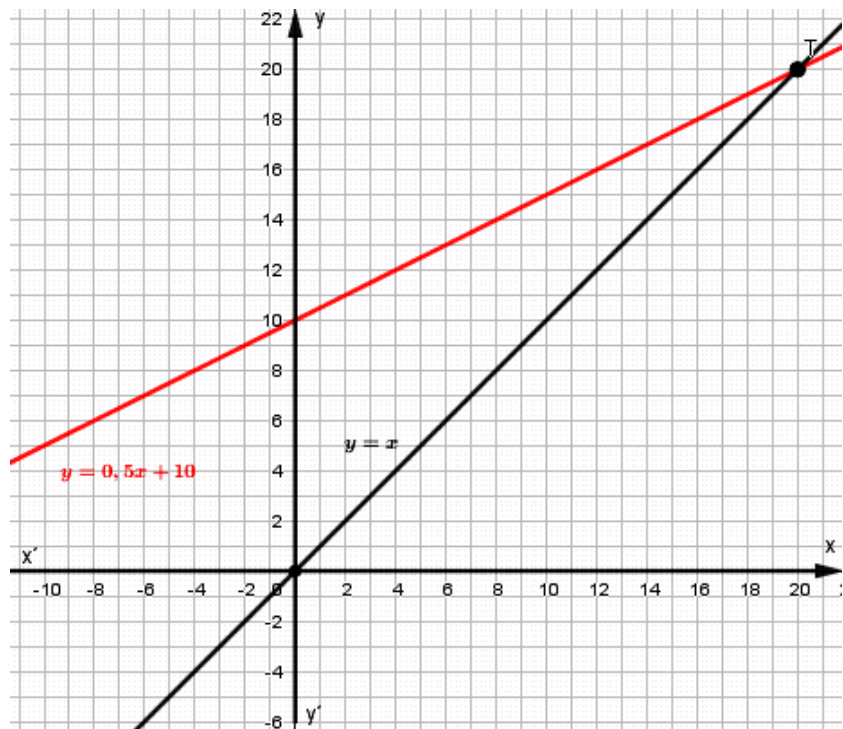
$$1x - 0,5x = 10$$

$$0,5x = 10$$

$$x = 20$$

Αφού το  $x=20$  τότε και  $y=x=20$

Επομένως οι ευθείες τέμνονται στο σημείο A(20,20):



### Ερώτηση 25

Πότε δύο ποσά x,y λέγονται αντιστρόφως ανάλογα;

Δύο ποσά x,y ονομάζονται αντιστρόφως ανάλογα όταν πολλαπλασιάζοντας τις τιμές του ενός ποσού με έναν αριθμό, τότε οι αντίστοιχες τιμές του άλλου ποσού διαιρούνται με τον ίδιο αριθμό.

Π.χ.

<b>x</b>	1	2	3	4	6	8	12	24
<b>y</b>	24	12	8	6	4	3	2	1

### Ερώτηση 26

Ποια είναι η βασική ιδιότητα των αντιστρόφως ανάλογων ποσών;

Όταν δύο ποσά  $x, y$  είναι αντιστρόφως ανάλογα, τότε το γινόμενο των αντιστοίχων τιμών τους είναι σταθερό.

Π.χ.

$$y \cdot x = 24$$

$$\text{Άρα } y = \frac{24}{x}$$

$$\text{Γενικά } y = \frac{a}{x}$$

### Ερώτηση 27

Τι ονομάζουμε υπερβολή;

Υπερβολή ονομάζουμε τη γραφική παράσταση της  $y = \frac{a}{x}$

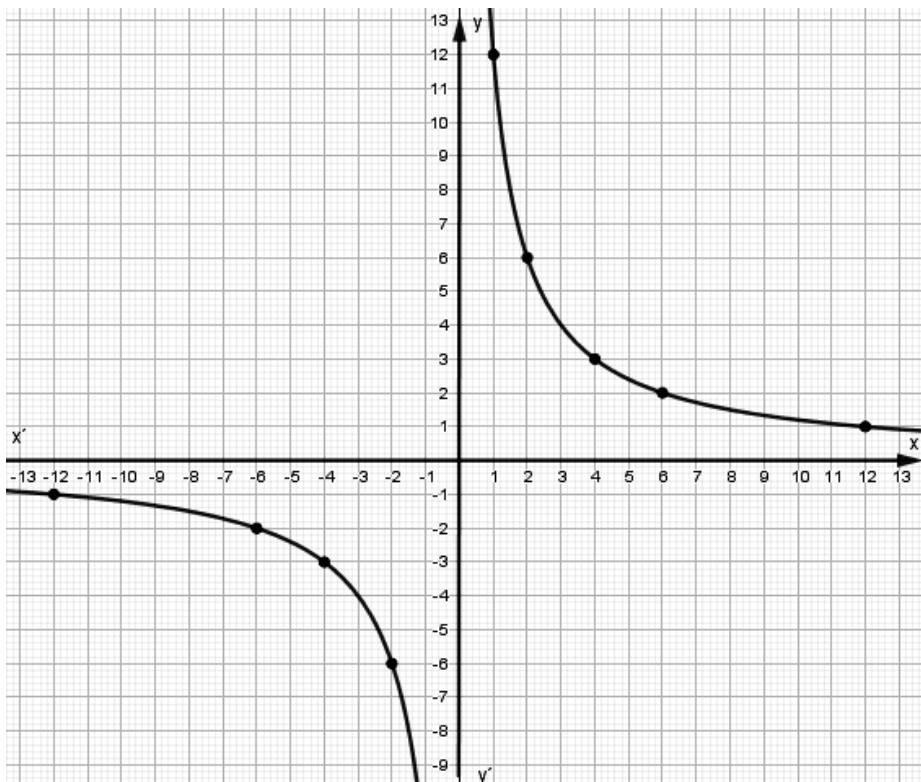
Π.χ. Άσκηση 3 σελίδα 82

### Ερώτηση 28

Ποιες είναι οι ιδιότητες της υπερβολής;

$$a > 0, y = \frac{12}{x}$$

x	-12	-6	-4	-2	1	2	4	6	12
y	-1	-2	-3	-6	12	6	3	2	1



Η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $y = \frac{\alpha}{x}$ ,  $\alpha \neq 0$ , όταν  $x$  είναι πραγματικός

λέγεται υπερβολή και αποτελείται από δύο κλάδους που βρίσκονται:

(i) Στο 1<sup>ο</sup> και 3<sup>ο</sup> τεταρτημόριο των αξόνων όταν  $\alpha > 0$

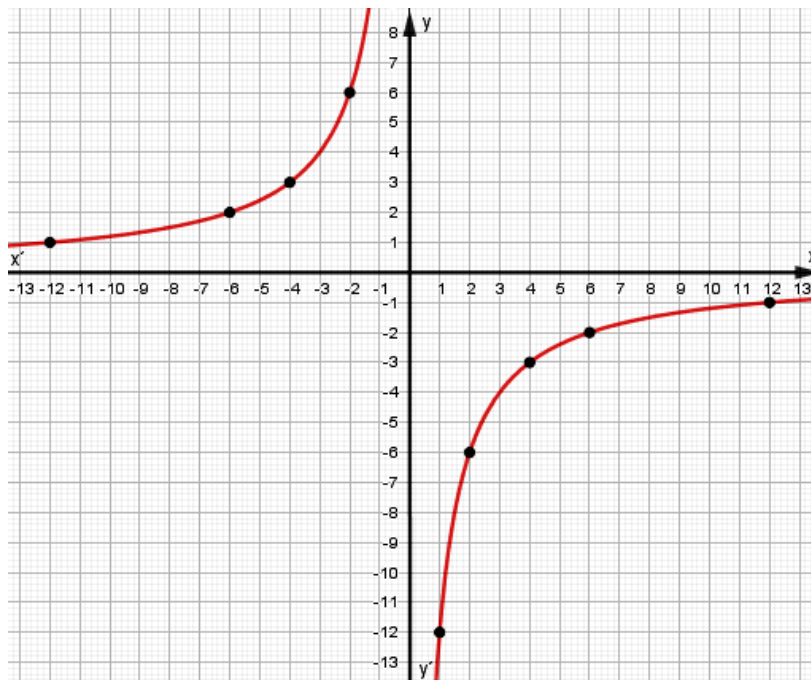
(ii) Η υπερβολή  $y = \frac{\alpha}{x}$ ,  $\alpha \neq 0$  έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή  $O(0,0)$  των αξόνων

(iii) Η υπερβολή  $y = \frac{\alpha}{x}$ ,  $\alpha > 0$  έχει άξονα συμμετρίας τη διχοτόμο των γωνιών των αξόνων

με εξίσωση  $y = x$

$\alpha < 0, y = -\frac{12}{x}$

<b>x</b>	-12	-6	-4	-2	1	2	4	6	12
<b>y</b>	1	2	3	6	-12	-6	-3	-2	-1



Η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $y = \frac{\alpha}{x}$ ,  $\alpha < 0$  όταν  $x$  είναι πραγματικός

λέγεται υπερβολή και αποτελείται από δύο κλάδους που βρίσκονται:

(i) Στο 2<sup>ο</sup> και 4<sup>ο</sup> τεταρτημόριο των αξόνων όταν  $\alpha < 0$

(ii) Η υπερβολή  $y = \frac{\alpha}{x}$ ,  $\alpha < 0$  έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή  $O(0,0)$  των αξόνων

(iii) Η υπερβολή  $y = \frac{\alpha}{x}$ ,  $\alpha < 0$  έχει άξονα συμμετρίας τη διχοτόμο των γωνιών των αξόνων

με εξίσωση  $y = -x$

### Ερώτηση 29

Τι ονομάζουμε παραβολή; ( εκτός εξεταστέας ύλης!)

Παραβολή ονομάζουμε τη γραφική παράσταση της  $y=ax^2$

Εφαρμογή 5 σελίδα 64 σχολικού βιβλίου

### ΕΦΑΡΜΟΓΗ 5

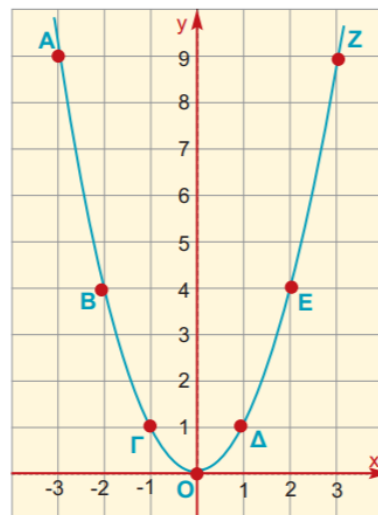
Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $y = x^2$ .

**Λύση:** Σχηματίζουμε, καταρχάς, έναν πίνακα τιμών της συνάρτησης.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

Στη συνέχεια, τοποθετούμε σ' ένα σύστημα αξόνων τα σημεία με συντεταγμένες  $(x, y)$  του παραπάνω πίνακα. Έτσι, βρίσκουμε τα σημεία  $A(-3, 9)$ ,  $B(-2, 4)$ ,  $\Gamma(-1, 1)$ ,  $O(0, 0)$ ,  $\Delta(1, 1)$ ,  $E(2, 4)$  και  $Z(3, 9)$ .

Στη συνέχεια, ενώνουμε με τη σειρά τα σημεία αυτά. Η καμπύλη που προκύπτει είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $y = x^2$ .



### Ερώτηση 30

Ποιες είναι οι ιδιότητες της παραβολής; (εκτός εξεταστέας ύλης!)

Η συνάρτηση  $y=ax^2$  με  $a \neq 0$

(i) Έχει γραφική παράσταση μια καμπύλη που είναι παραβολή με κορυφή την αρχή των αξόνων  $O(0,0)$

(ii) Έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα  $y'y$ .

(iii) Αν  $a > 0$  η παραβολή βρίσκεται **πάνω** από τον άξονα  $x'x$  και έχει **ελάχιστη** τιμή την  $y=0$  όταν  $x=0$ .

Αν  $a < 0$  η παραβολή βρίσκεται **κάτω** από τον άξονα  $x'x$  και έχει **μέγιστη** τιμή την  $y=0$  όταν  $x=0$ .

